DEA を用いた AHP の加重値算出法

瀬　見　　　博

I　序

AHP（Analytic Hierarchy Process）は、扱いやすく効果的な多基準意思決定手法（Multi-Criteria Decision Making method）として、さまざまな分野の意思決定問題に適用され、その有用性が認められてきたが[1)]、それがうまく機能するためには、意思決定者の主観的判断から得られる一対比較行列に基づいて評価基準や代替案の加重値（重要度）を決定するための客観的な方法が必要とされる。そのために、従来から、固有ベクトル法（eigenvector method）、対数最小二乗法（logarithmic least squares method）、ゴールプログラミング法（goal programming method）などさまざまな手法が提唱されてきたが、何れもメリット・デメリットをもち、未だあらゆるケースに対応できる最良の方法が確立されていない[2)]。

ところで、最近、加重値を算出するために DEA（Data Envelopment Analysis）[3)] を用いる研究が盛んに行われるようになり、Ramanathan の DEAHP

1） AHP については、Saaty, T. L.（1994）, *Fundamentals of decision making and priority theory with the analytic hierarchy process,* RWS Publications を、また、適用例については、刀根薫・眞鍋龍太郎編（1990）『AHP 事例集』、日科技連や木下栄蔵・大屋隆生編（2007）『企業・行政のための AHP 事例集』、日科技連を参照されたい。

2） この点に関しては、Mikhailov, L.（2000）, A fuzzy programming method for deriving priorities in the analytic hierarchy process, *Journal of the Operational Research Society,* 51, pp. 341-349 を参照されたい。

3） DEA については、例えば、Charnes, A., Cooper, W. W., Rhodes, E.（1978）, Measuring

法[4]をはじめ、Wang, Chin, Poon の DEA/AR法[5]、Wang, Chin の DEA 法[6]（以下では、WCDEA 法と呼ぶ）などが相次いで提案され注目を集めている。そこで本稿において、この３つを取り上げ、それらがいかなる手法であるのかを概観するとともに、数値例を用いて比較・検討してみることにする。

Ⅱ　DEAHP 法

評価基準や代替案に関する一対比較行列 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ が、

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{1}$$

で、また、評価基準や代替案の加重ベクトル W が $W=(w_1, w_2, \ldots, w_n)^{\mathrm{T}}$ で与えられているものとしよう。ここに、a_{ij} は評価基準や代替案の j 番目の項目に対する i 番目の項目の評価値を表しており、$a_{ii}=1$、$a_{ji}=1/a_{ij}>0(j\neq i)$ である。このとき、Ramanathan は、表１のように、A の各要素 a_{ij} の値を i 番目の事業体（Decision Making Unit; 以下、DMU$_i$ と略す）における j 番目のアウトプットの産出量と見なし、さらにすべての DMU$_i$ のインプットは１種類でその値を１と想定することによって、A の加重ベクトル W の値を、DEA のインプット指向型 CCR モデル(2)～(5)、

$$\text{Max}\quad w_o=\sum_{j=1}^{n} a_{oj}v_j \tag{2}$$

---

the efficiency of decision making units, *European Journal of Operational Research*, 2, pp. 429-444 などを参照されたい。

4) Ramanathan, R. (2006), Data envelopment analysis for weight derivation and aggregation in the analytic hierarchy process, *Computers & Operations Research*, 33, pp. 1289-1307.

5) Wang,Y-M., Chin, K-S., Poon, G. K. K. (2008), A data envelopment analysis method with assurance region for weight generation in the analytic hierarchy process, *Decision Support Systems*, 45, pp. 913-921.

6) Wang, Y-M., Chin, K-S. (2009), A new data envelopment analysis method for priority determination and group decision making in the analytic hierarchy process, *European Journal of Operational Research*, 195, pp. 239-250.

$$\text{s. t.}\quad u_1 = 1 \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j - u_1 \leq 0 \qquad i = 1, \ldots, n \tag{4}$$

$$u_1,\ v_j \geq 0 \qquad j = 1, \ldots, n \tag{5}$$

を用いて推定することを提案し、それを DEAHP 法と名付けた。ここに、下付添字 o はいま DMU_o が評価の対象になっていることを意味する。なお、この DMU_o が AHP において加重値（重要度）を求める対象となっている評価基準や代替案に対応している。そして、すべての DMU_i に対して上記モデル(2)～(5)を解いて得られる最適な目的関数値（DMU_i の DEA 効率値）$W^* = (w_1^*, w_2^*, \ldots, w_n^*)^{\mathrm{T}}$ によって一対比較行列 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ の加重値が与えられる。また、A が完全に整合性のとれた行列であれば、すなわち、すべての $i, j, k = 1, \ldots, n$ に対して、$a_{ij} = a_{ik} \cdot a_{kj}$ が成立しているならば、DEAHP 法は真の加重値を与えることが証明できる[7)]。

表 1

	アウトプット 1	アウトプット 2	…	アウトプット n	ダミー・インプット
DMU_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	1
DMU_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	1
…	…	…	…	…	…
DMU_n	a_{n1}	a_{n2}	…	a_{nn}	1

さらに、得られた評価基準と代替案の加重値を統合して代替案の最終的な総合評価値を導くために、二つの DEA モデルが用いられる。なお、総合評価値を算定する場合には、評価基準の数は m 個、代替案の数は n 個と仮定する。

第 1 のモデルは，評価基準の重要度（加重値）を考慮せずに代替案の総合評価値を、

$$\text{Max}\quad \sum_{j=1}^{m} w_{oj} v_j \tag{6}$$

7）　Ramanathan, *op. cit.,* pp. 1296-1297.

$$\text{s. t.}\quad u_1=1 \tag{7}$$

$$\sum_{j=1}^{m} w_{ij}v_j - u_1 \leq 0 \qquad i=1,\ldots,n \tag{8}$$

$$u_1,\ v_j \geq 0 \qquad j=1,\ldots,m \tag{9}$$

により求めるものである。ここに、v_j（$j=1,\ldots,m$）は決定変数、w_{ij}（$i=1,\ldots,n$：$j=1,\ldots,m$）は、j 番目の評価基準に関する i 番目の代替案の加重値である。第2のモデルは、評価基準間の重要度の違いを、

$$v_j=d_jv_1=(w_j/w_1)v_1 \qquad j=1,\ldots,m \tag{10}$$

で表し、それを制約条件として上記モデル(6)～(9)に追加することにより代替案の総合評価値を計算するもので、

$$\text{Max}\quad v_1\left(\sum_{j=1}^{m} w_{oj}d_j\right) \tag{11}$$

$$\text{s. t.}\quad u_1=1 \tag{12}$$

$$v_1\left(\sum_{j=1}^{m} w_{ij}d_j\right)-u_1 \leq 0 \qquad i=1,\ldots,n \tag{13}$$

$$u_1,\ v_1 \geq 0 \tag{14}$$

で与えられる。

Ⅲ　DEA/AR 法

Wang, Chin, Poon は、DEA の領域限定法（Assurance Region Approach）の考え方を用いることにより、評価基準や代替案の加重値を求める DEA/AR モデルを提案している。

いま、一対比較行列 A の最大固有値を $\lambda_{\max}$、固有ベクトル（加重ベクトル）を $W=(w_1, w_2, \ldots, w_n)^{\mathrm{T}}$ とすると、固有値と固有ベクトルの関係より、

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}w_j=\lambda_{\max}w_i \qquad i=1,\ldots,n \tag{15}$$

が成立し、

$$v_j=w_j/\lambda_{\max} \qquad j=1,\ldots,n \tag{16}$$

とおくことによって、(15)は、

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j = w_i \qquad i=1, \dots, n \tag{17}$$

と表すことができる。また、n 次の一対比較行列に対しては、

$$\lambda_{\max} \geq n \tag{18}$$

となることが知られている。そこで、$\lambda_{\max}$ の上限値を β とすれば、$n \leq \lambda_{\max} \leq \beta$ から、決定変数 v_j に課せられる領域限定（assurance region）と呼ばれる制約式、

$$w_j / \beta \leq v_j \leq w_j / n \qquad j=1, \dots, n \tag{19}$$

が得られる。したがって、(17)と(19)を結合すれば、一対比較行列 A に対して以下のような DEA/AR モデルを定式化することができる。

$$\text{Max} \quad w_o \tag{20}$$

$$\text{s. t.} \quad w_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j \leq 1 \qquad i=1, \dots, n \tag{21}$$

$$w_j / \beta \leq v_j \leq w_j / n \qquad j=1, \dots, n \tag{22}$$

なお、A が完全に整合性のとれた行列であれば、上記の DEA/AR モデルによって与えられる加重値 w_i^* は、A の真の加重値 $w_i (i=1, \dots, n)$ を正規化した値になることが証明されている[8)]。すなわち、

$$w_i^* = w_i / \max_{1 \leq j \leq n} \{w_j\} \qquad i=1, \dots, n \tag{23}$$

ところで、一対比較行列 $A=(a_{ij})_{n \times n}$ の行和を $r_i (i=1, \dots, n)$ とすれば、ペロン－フロベニウス（Perron-Frobenius）の定理より、

$$\min_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{1}{r_i} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} r_j \right) \leq \lambda_{\max} \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{1}{r_i} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} r_j \right) \tag{24}$$

が成り立つ。また、A とその転置行列 A^{T} の最大固有値は同じになるので、上の不等式(24)は A^{T} に対しても成立する。すなわち、A の列和を $c_j (j=1, \dots, n)$ とすると、

$$\min_{1 \leq j \leq n} \left(\frac{1}{c_j} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} c_i \right) \leq \lambda_{\max} \leq \max_{1 \leq j \leq n} \left(\frac{1}{c_j} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} c_i \right) \tag{25}$$

8） Wang, Chin, Poon, *op. cit.*, p. 915.

が得られる。したがって、β の値は、(24)と(25)から、

$$\beta=\min\left\{\max_{1\leq i\leq n}\left(\frac{1}{r_i}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}r_j\right),\ \max_{1\leq j\leq n}\left(\frac{1}{c_j}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}c_i\right)\right\} \tag{26}$$

によって算定される。

さて、m 個の評価基準の加重値 $w_1, w_2, \ldots, w_m$ と $j(j=1, \ldots, m)$ 番目の評価基準に関する n 個の代替案の加重値 $w_{1j}, w_{2j}, \ldots, w_{nj}$ が求められると、表2に示されるように、AHP の通常の統合化手続きを用いて代替案の総合評価値が計算される。ただし、得られる総合評価値はそれらの最大値に対して正規化された値で示される。すなわち、代替案 A_i の正規化された総合評価値は、

$$w^*_{A_i}=\sum_{j=1}^{m}w_{ij}w_j\Big/\max_{1\leq k\leq n}\left\{\sum_{j=1}^{m}w_{kj}w_j\right\}\qquad i=1, \ldots, n \tag{27}$$

によって与えられる。

さらに、総合評価値を算出するための前節の第2のモデル(11)〜(14)の解は、DEA/AR 法における正規化された総合評価値を求めるための方法によって計算した値と同じになることが指摘できる。つまり、(13)から、

$$v_1\leq u_1\Big/\left(\sum_{j=1}^{m}w_{ij}d_j\right)=1\Big/\left(\sum_{j=1}^{m}w_{ij}d_j\right)\qquad i=1, \ldots, n \tag{28}$$

が得られるが、(28)は、

表2　加重値の総合化

代替案	評価基準				総合評価値	
	w_1	w_2	$\cdots$	w_m	非正規化	正規化
A_1	w_{11}	w_{12}	$\cdots$	w_{1m}	$\sum_{j=1}^{m}w_{1j}w_j$	$\sum_{j=1}^{m}w_{1j}w_j\Big/\max_{1\leq i\leq n}\left\{\sum_{j=1}^{m}w_{ij}w_j\right\}$
A_2	w_{21}	w_{22}	$\cdots$	w_{2m}	$\sum_{j=1}^{m}w_{2j}w_j$	$\sum_{j=1}^{m}w_{2j}w_j\Big/\max_{1\leq i\leq n}\left\{\sum_{j=1}^{m}w_{ij}w_j\right\}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_n	w_{n1}	w_{n2}	$\cdots$	w_{nm}	$\sum_{j=1}^{m}w_{nj}w_j$	$\sum_{j=1}^{m}w_{nj}w_j\Big/\max_{1\leq i\leq n}\left\{\sum_{j=1}^{m}w_{ij}w_j\right\}$

$$v_1 \leq \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ 1 / \sum_{j=1}^{m} w_{ij} d_j \right\} = 1 / \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^{m} w_{ij} d_j \right\} \tag{29}$$

と書き直すことができる。ところで、目的関数⑾を最大にするには v_1 が上限値、

$$v_1^* = 1 / \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^{m} w_{ij} d_j \right\} \tag{30}$$

をとる必要がある。したがって、目的関数⑾の最大値は、

$$\begin{aligned} v_1^* \left(\sum_{j=1}^{m} w_{oj} d_j \right) &= \sum_{j=1}^{m} w_{oj} d_j / \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^{m} w_{ij} d_j \right\} \\ &= \sum_{j=1}^{m} w_{oj} (w_j / w_1) / \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^{m} w_{ij} (w_j / w_1) \right\} \\ &= \sum_{j=1}^{m} w_{oj} w_j / \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^{m} w_{ij} w_j \right\} \end{aligned} \tag{31}$$

と表され、㉗の $w_{A_i}^*$ と同じになる。

Ⅳ　WCDEA 法

DEAHP 法では、⑵からわかるように、DEA 効率値を評価基準や代替案の重要度（加重値）と定義していたが、Wang, Chin は、それを評価基準や代替案のスコア（score）と見なし、その相対的な値を重要度(加重値)と定義し直すことによって新たな DEA モデル（WCDEA モデル）を展開している。すなわち、i 番目の評価基準や代替案のスコア s_i は、

$$s_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j \qquad i = 1, \ldots, n \tag{32}$$

と示すことができるので、その相対的スコア w_i は、

$$w_i = s_i / \sum_{k=1}^{n} s_k \qquad i = 1, \ldots, n \tag{33}$$

と定義でき、それによって i 番目の評価基準や代替案の重要度（加重値）を表すことが想定されている。

一方、Saaty が提唱する固有ベクトル法では、$s_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j \geq n v_i$（$i = 1, \ldots, n$）

となること、また、完全に整合的な一対比較行列の場合には等号が成り立つこと、が知られている。したがって、AHP における加重値を求めるための DEA モデルは次のように定式化することができる。

$$\text{Max} \quad w_o = s_o / \sum_{k=1}^{n} s_k \tag{34}$$

$$\text{s. t.} \quad s_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j \leq 1 \qquad i=1, \ldots, n \tag{35}$$

$$0 \leq v_i \leq s_i / n \qquad i=1, \ldots, n \tag{36}$$

ここに、$v_i (i=1, \ldots, n)$ が決定変数である。

さて、上記モデルを同値の線形計画モデルに変換するために、

$$t = 1 / \sum_{j=1}^{n} s_j \tag{37}$$

$$z_j = t v_j \qquad j=1, \ldots, n \tag{38}$$

とおけば、

$$w_i = s_i / \sum_{k=1}^{n} s_k = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j / \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{kj} \right) v_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j \tag{39}$$

$$s_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j = (1/t) \sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j = w_i / t \qquad i=1, \ldots, n \tag{40}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \right) z_j = t \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \right) v_j = 1 \tag{41}$$

の関係が導きだせるため、(34)〜(36)は、以下の線形計画モデルの形で表現することができる。

$$\text{Max} \quad w_o = \sum_{j=1}^{n} a_{oj} z_j \tag{42}$$

$$\text{s. t.} \quad \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \right) z_j = 1 \tag{43}$$

$$w_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j \leq t \qquad i=1, \ldots, n \tag{44}$$

$$z_i - (1/n) w_i \leq 0 \qquad i=1, \ldots, n \tag{45}$$

$$t, z_j \geq 0 \qquad j=1, \ldots, n \tag{46}$$

ところで、w_o は t と無関係であるため制約条件(44)を除いても w_o の値に影

響を及ぼすことはない。したがって、最終的に得られる WCDEA モデルは、

$$\text{Max} \quad w_o = \sum_{j=1}^{n} a_{oj} z_j \tag{47}$$

$$\text{s. t.} \quad \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\right) z_j = 1 \tag{48}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j \geq n z_i \qquad i=1, \dots, n \tag{49}$$

$$z_j \geq 0 \qquad j=1, \dots, n \tag{50}$$

で与えられることになる。また、WCDEA モデルによって算出された加重値を $W^* = (w_1^*, w_2^*, \dots, w_n^*)^{\mathrm{T}}$ とすれば、$\sum_{i=1}^{n} w_i^* \geq 1$ が成り立つこと、完全に整合性のとれた一対比較行列に対しては真の加重値をもたらすこと、が証明できる[9]。さらに、代替案の最終的な総合評価値を導出する際に、DEAHP 法や DEA/AR 法のように正規化は必要でないことを提唱している[10]。

V　数値例

Ramanathan が提示した数値例を上述の３つのモデル、DEAHP、DEA/AR、WCDEA に適用することによって、評価基準や代替案の加重値と代替案の総合評価値を求めてみることにする。

いま、AHP の階層構造が図１のように示され、最終目標から見た評価基準の一対比較行列が表３‑１で、また、評価基準 C_1、C_2、C_3、C_4 に関する代替案の一対比較行列が順に表３‑２～表３‑５で与えられているものとする。

さて、一例として、表３‑１のデータを用いて評価基準 C_1 の加重値を算定してみよう。

まず、DEAHP 法では、モデルが、

$$\text{Max} \quad w_{C_1} = v_1 + v_2 + 4v_3 + 5v_4$$

$$\text{s. t.} \quad v_1 + v_2 + 4v_3 + 5v_4 \leq 1$$

9）　Wang, Chin, *op. cit.*, p. 242.
10）*ibid.*, pp. 246‑247.

$$v_1 + v_2 + 5v_3 + 3v_4 \leq 1$$

$$(1/4)v_1 + (1/5)v_2 + v_3 + 3v_4 \leq 1$$

$$(1/5)v_1 + (1/3)v_2 + (1/3)v_3 + v_4 \leq 1$$

$$v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4 \geq 0$$

図１　数値例の AHP 階層構造

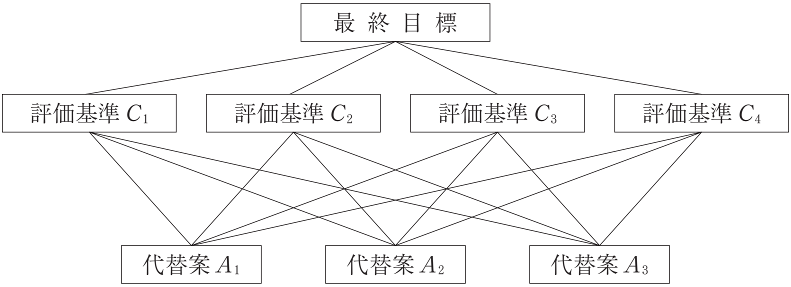

表３－１

最終目標	C_1	C_2	C_3	C_4
C_1	1	1	4	5
C_2	1	1	5	3
C_3	1/4	1/5	1	3
C_4	1/5	1/3	1/3	1

表３－２

C_1	A_1	A_2	A_3
A_1	1	1/3	5
A_2	3	1	7
A_3	1/5	1/7	1

表３－３

C_2	A_1	A_2	A_3
A_1	1	1/9	1/5
A_2	9	1	4
A_3	5	1/4	1

表３－４

C_3	A_1	A_2	A_3
A_1	1	2	5
A_2	1/2	1	3
A_3	1/5	1/3	1

表３－５

C_4	A_1	A_2	A_3
A_1	1	3	9
A_2	1/3	1	3
A_3	1/9	1/3	1

と定式化でき、$w^*_{C_1}=1$ が求まる。

つぎに、DEA/AR 法の場合、㉖から β の値は $\beta=4.885$ で与えられることがわかるので、モデルは、

$$
\begin{aligned}
\text{Max}\quad & w_{C_1}\\
\text{s.t.}\quad & v_1+v_2+4v_3+5v_4-w_1=0\\
& v_1+v_2+5v_3+3v_4-w_2=0\\
& (1/4)v_1+(1/5)v_2+v_3+3v_4-w_3=0\\
& (1/5)v_1+(1/3)v_2+(1/3)v_3+v_4-w_4=0\\
& v_i-(1/4.885)w_i\geq 0 \qquad i=1,2,3,4\\
& v_i-(1/4)w_i\leq 0 \qquad i=1,2,3,4\\
& w_i\leq 1 \qquad i=1,2,3,4
\end{aligned}
$$

と表すことができ、$w^*_{C_1}=1$ が得られる。

最後に、WCDEA 法のモデルは、

$$
\begin{aligned}
\text{Max}\quad & w_{C_1}=z_1+z_2+4z_3+5z_4\\
\text{s.t.}\quad & (49/20)z_1+(38/15)z_2+(31/3)z_3+12z_4=1\\
& z_1+z_2+4z_3+5z_4\geq 4z_1\\
& z_1+z_2+5z_3+3z_4\geq 4z_2\\
& (1/4)z_1+(1/5)z_2+z_3+3z_4\geq 4z_3\\
& (1/5)z_1+(1/3)z_2+(1/3)z_3+z_4\geq 4z_4\\
& z_1, z_2, z_3, z_4\geq 0
\end{aligned}
$$

と示すことができ、$w^*_{C_1}\cong 0.4013$ となる。

そこで、残りの評価基準と表３‐２～表３‐５のデータに対しても同様の計算を繰り返すことによって、表４‐１～表４‐５の結果を得ることができる。なお、表４‐１～表４‐５はそれぞれ表３‐１～表３‐５に対応する加重値を表しており、また、各表の最終列には AHP で通常用いられる固有ベクトル法(固有値法)により求めた加重値が記されている。

ところで、評価基準と代替案の加重値（表４‐１～表４‐５）が得られると、それらを統合して各代替案の総合評価値が算定される。一例として、代替案

表 4－1　評価基準の加重値

最終目標	DEAHP 法	DEA/AR 法	WCDEA 法	固有値法
C_1	1	1	0.4013	0.4003
C_2	1	0.9967	0.3991	0.3935
C_3	0.6	0.3259	0.1310	0.1278
C_4	0.3333	0.2014	0.0811	0.0784

表 4－2　C_1 に関する代替案の加重値

C_1	DEAHP 法	DEA/AR 法	WCDEA 法	固有値法
A_1	0.7143	0.4329	0.2802	0.2790
A_2	1	1	0.6512	0.6491
A_3	0.1429	0.1120	0.0725	0.0719

表 4－3　C_2 に関する代替案の加重値

C_2	DEAHP 法	DEA/AR 法	WCDEA 法	固有値法
A_1	0.1111	0.0862	0.0609	0.0603
A_2	1	1	0.7106	0.7085
A_3	0.5556	0.3290	0.2325	0.2311

表 4－4　C_3 に関する代替案の加重値

C_3	DEAHP 法	DEA/AR 法	WCDEA 法	固有値法
A_1	1	1	0.5816	0.5816
A_2	0.6	0.5314	0.3090	0.3090
A_3	0.2	0.1882	0.1095	0.1095

表 4－5　C_4 に関する代替案の加重値

C_4	DEAHP 法	DEA/AR 法	WCDEA 法	固有値法
A_1	1	1	0.6923	0.6923
A_2	0.3333	0.3333	0.2308	0.2308
A_3	0.1111	0.1111	0.0769	0.0769

表５　代替案の総合評価値

	DEAHP 法 モデル１	DEAHP 法 モデル２	DEA/AR 法 非正規化	DEA/AR 法 正規化
A_1	1	0.7117	1.0461	0.4676
A_2	1	1	2.2370	1
A_3	0.5556	0.3462	0.5236	0.2341

	WCDEA 法	固有値法
A_1	0.2691	0.2640
A_2	0.6041	0.5962
A_3	0.1425	0.1397

A_1 の総合評価値を求めてみることにする。

DEAHP 法の場合、評価基準の加重値を考慮しない第１のモデルは、

$$\begin{aligned}
\text{Max}\quad & w_{A_1}=0.7143v_1+0.1111v_2+v_3+v_4 \\
\text{s. t.}\quad & 0.7143v_1+0.1111v_2+v_3+v_4\leq 1 \\
& v_1+v_2+0.6v_3+0.3333v_4\leq 1 \\
& 0.1429v_1+0.5556v_2+0.2v_3+0.1111v_4\leq 1 \\
& v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4\geq 0
\end{aligned}$$

と表すことができ、$w^*_{A_1}=1$ となる。また、評価基準の加重値を加味する第２のモデルは、表４‐１の加重値情報に基づいて得られる新たな制約式 $v_1=v_2$, $v_1=(1/0.6)v_3$, $v_1=3v_4$ を、第１のモデルに追加することによって定式化でき、$w^*_{A_1}\cong 0.7117$ が求まる。つぎに、DEA/AR 法に関しては、表２の統合化の手続きを用いて、$w^*_{A_1}=0.4329\times 1+0.0862\times 0.9967+1\times 0.3259+1\times 0.2014\cong 1.0461$ となることが、さらに、WCDEA 法では、$w^*_{A_1}=0.2802\times 0.4013+0.0609\times 0.3991+0.5816\times 0.131+0.6923\times 0.0811\cong 0.2691$ となることがわかる。そこで、代替案 A_2、A_3 についても同様の計算を行うことによって、表５で示されるように各手法ごとに代替案の総合評価値を得ることができる。

Ⅵ　結

前節の数値例から、WCDEA 法と固有ベクトル法で求めた評価基準・代替案の加重値および代替案の総合評価値に殆ど違いはなく、また、それらを正規化した値と DEA/AR 法から得られた値の間にも大きな差異は存在していないことがわかる。すなわち、これら３つの手法に関しては加重値間の比率にわずかな差しか認められない。しかし、DEAHP 法については、完全に整合的な表３‐５の場合[11] を除けば、何れにおいても上記３つの手法よりも幾分大きな値が算出されている。特に、表３‐１～表３‐５のなかで整合度（consistency index：C. I.）と整合比（consistency ratio：C. R.）が一番大きい表３‐１の加重値（表４‐１）を見れば[12]、DEAHP 法は他の手法よりも項目間の重要度の違いを判別する能力が低い印象を受ける。この点に関して、Wang, Chin, Poon や Wang, Chin は、整合度や整合比が0.1以上の非整合的な一対比較行列が与えられた場合、DEAHP 法は直感に反する加重値を生みだす可能性があること、また、一対比較行列が整合的であっても、すべての項目の加重値が等しくなるなど非論理的で無意味な結果をもたらす可能性があること、などを具体例によって指摘している[13]。

以上、現実問題への適用を考えた場合、DEAHP 法には改善すべき点が多々あること、また、DEA/AR 法と WCDEA 法に関しては、両手法の関連性とそれぞれの手法の問題点について、多くの数値例を踏まえながらさらに詳しく検討する必要があること、がわかる。

（筆者は関西学院大学商学部教授）

11）一対比較行列が完全に整合的な場合は、何れの手法も真の加重値を与えてくれる。
12）C. I. と C. R. については、例えば、刀根薫（1986）『ゲーム感覚意思決定法―AHP 入門―』、日科技連、37頁～38頁を参照されたい。また、表３‐１～表３‐５の順に、C. I. は、0.080, 0.032, 0.036, 0.002, 0、C. R. は、0.088, 0.056, 0.061, 0.003, 0 となる。
13）Wang, Chin, Poon, *op. cit.,* p. 914.、Wang, Chin, *op. cit.,* p. 240.